

**ĐỀ THI HSG LỚP 8  
Trường Đặng Trần Côn**

Thời gian: 120 phút  
(NGÀY THI: 4/10/2014)

**Bài 1:** Rút gọn các biểu thức sau:

- a)  $(2x+y)^2 - (3x-5)(2x+7) + 2x^2 - 4xy + 11x + 9$
- b)  $(x^n+1)(x^n-2) - x^{n-5}(x^{n+5}-x^5) - 2014$

**Bài 2:** Cho biểu thức:  $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2014.2015}$

a) Tính A.

b) Chứng minh:  $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2015^2} < 1$

**Bài 3:** Chứng minh rằng:  $n^3 - 3n^2 + 2n$  chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

**Bài 4:** Cho  $\triangle ABC$  có AM là đường trung tuyến. Trên cạnh AB lấy hai điểm D và E sao cho  $AD = DE = EB$ . Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho  $AC = 3AF$ . Gọi I là giao điểm của AM và CD.

a) Chứng minh:  $DI = \frac{1}{4}CD$

b) Chứng minh ba đường thẳng AM, CD, và BF đồng quy.

**Bài 5:** Chứng minh rằng nếu a, b, c là số đo của ba cạnh một tam giác vuông, với a là độ dài cạnh huyền thì các số  $x = 9a + 4b + 8c; y = 4a + b + 4c; z = 8a + 4b + 7c$  cũng là số đo các cạnh của một tam giác vuông khác,

**Bài 6:** Cho 12 số tự nhiên từ số 1 đến số 12. Có thể sắp xếp 12 số này trên một vòng tròn sao cho 2 số kề nhau bất kì có tổng lớn hơn 12 hay không? Vì sao?

❖ HẾT ❖

**Bài 1:** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $(2x+y)^2 - (3x-5)(2x+7) + 2x^2 - 4xy + 11x + 9$

$$\begin{aligned} & (2x+y)^2 - (3x-5)(2x+7) + 2x^2 - 4xy + 11x + 9 \\ &= 4x^2 + 4xy + y^2 - (6x^2 + 21x - 10x - 35) + 2x^2 - 4xy + 11x + 9 \\ &= 4x^2 + 4xy + y^2 - 6x^2 - 21x + 10x + 35 + 2x^2 - 4xy + 11x + 9 \\ &= y^2 + 44 \end{aligned}$$

b)  $(x^n + 1)(x^n - 2) - x^{n-5}(x^{n+5} - x^5) - 2014$

$$\begin{aligned} & (x^n + 1)(x^n - 2) - x^{n-5}(x^{n+5} - x^5) - 2014 \\ &= x^{2n} - 2x^n + x^n - 2 - x^{2n} + x^n - 2014 \\ &= -2016 \end{aligned}$$

**Bài 2:** Cho biểu thức:  $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2014.2015}$

a) Tính A.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2014.2015} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015} \end{aligned}$$

b) Chứng minh:  $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2015^2} < 1$

Ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} \\ \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} \\ ..... \\ \frac{1}{2015^2} < \frac{1}{2014.2015} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2015^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2014.2015}$$

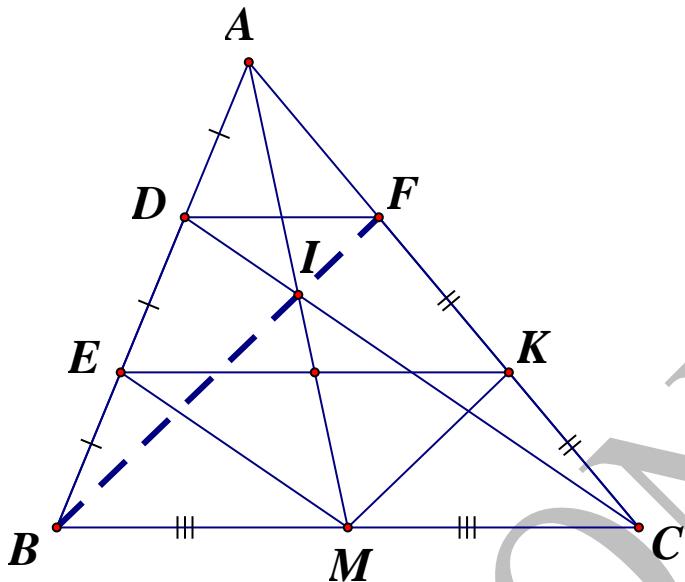
$$\Rightarrow B < \frac{2014}{2015} \Rightarrow B < 1$$

**Bài 3:** Chứng minh rằng:  $n^3 - 3n^2 + 2n$  chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

Ta có:  $n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2) = (n-2)(n-1)(n)$

Do  $(n-2)(n-1)n$  là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên có ít nhất 1 số chia hết cho 2, 1 số chia hết cho 3. Mà  $\text{UCLN}(3;2) = 1$ . Nên  $(n-2)(n-1)n \mid 2.3 \Rightarrow (n^3 - 3n^2 + 2n) \mid 6$

**Bài 4:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AM$  là đường trung tuyến. Trên cạnh  $AB$  lấy hai điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $AD = DE = EB$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $F$  sao cho  $AC = 3AF$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $CD$ .



a) Chứng minh:  $DI = \frac{1}{4}CD$

Chứng minh được:  $EM$  là đường trung bình của  $\triangle BDC \Rightarrow \begin{cases} EM \parallel DC \\ EM = \frac{1}{2}DC \quad (1) \end{cases}$

Xét  $\triangle AEM$ , ta có:

$$\begin{cases} D \text{ là trung điểm của } AE \dots \\ DI \parallel EM \dots \\ I \in AM \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow I \text{ là trung điểm của } AM$$

$\Rightarrow DI$  là đường trung bình của  $\triangle AEM$

 $\Rightarrow ID = \frac{1}{2}EM \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra:  $DI = \frac{1}{4}CD$

b) Chứng minh ba đường thẳng  $AM$ ,  $CD$ , và  $BF$  đồng quy.

Gọi  $K$  là trung điểm của  $FC$ .  $\Rightarrow AF = FK = KC$

Chứng minh được :

$$\begin{cases} IF \text{ là đường trung bình của } \triangle AMK \\ MK \text{ là đường trung bình của } \triangle BFC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IF \parallel MK \\ BF \parallel MK \end{cases} \Rightarrow IF \equiv BF \Rightarrow B, I, F \text{ thẳng hàng.}$$

**Bài 5:** Chứng minh rằng nếu  $a, b, c$  là số đo của ba cạnh một tam giác vuông, với  $a$  là độ dài cạnh huyền thì các số  $x = 9a + 4b + 8c; y = 4a + b + 4c; z = 8a + 4b + 7c$  cũng là số đo các cạnh của một tam giác vuông khác,

Theo đề bài, ta có:  $a^2 = b^2 + c^2$

Ta có :  $x = 9a + 4b + 8c \Rightarrow x^2 = 81a^2 + 16b^2 + 64c^2 + 72ab + 144ac + 64bc$

$$\begin{aligned} \text{mà } a^2 = b^2 + c^2 \text{ nên } x^2 &= 81(b^2 + c^2) + 16b^2 + 64c^2 + 72ab + 144ac + 64bc \\ &\Leftrightarrow x^2 = 97b^2 + 145c^2 + 72ab + 144ac + 64bc \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có:  $y = 4a + b + 4c \Rightarrow y^2 = 16a^2 + b^2 + 16c^2 + 8ab + 32ac + 8bc$

$$\begin{aligned} \text{mà } a^2 = b^2 + c^2 \text{ nên } y^2 &= 16(b^2 + c^2) + b^2 + 16c^2 + 8ab + 32ac + 8bc \\ &\Leftrightarrow y^2 = 17b^2 + 32c^2 + 8ab + 32ac + 8bc \quad (2) \end{aligned}$$

Ta có:  $z = 8a + 4b + 7c \Rightarrow z^2 = 64a^2 + 16b^2 + 49c^2 + 64ab + 112ac + 56bc$

$$\begin{aligned} \text{Mà } a^2 = b^2 + c^2 \text{ nên } z^2 &= 64(b^2 + c^2) + 16b^2 + 49c^2 + 64ab + 112ac + 56bc \\ &\Leftrightarrow z^2 = 80b^2 + 113c^2 + 64ab + 112ac + 56bc \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3), ta có:  $y^2 + z^2 = 97b^2 + 145c^2 + 72ab + 144ac + 64bc$

Mà  $\Leftrightarrow x^2 = 97b^2 + 145c^2 + 72ab + 144ac + 64bc$

Nên  $x^2 = y^2 + z^2$ . Vậy x, y, z cũng là 3 cạnh của tam giác vuông.

**Bài 6:** Cho 12 số tự nhiên từ số 1 đến số 12. Có thể sắp xếp 12 số này trên một vòng tròn sao cho 2 số kề nhau bất kì có tổng lớn hơn 12 hay không? Vì sao?

Để thỏa đề 2 số kề nhau bất kì có tổng lớn hơn 12 thì số 1 phải đi với 2 số lớn nhất là 11 và 12 thì tổng là:  $\begin{cases} 1+12=13 \text{ (thỏa đề)} \\ 1+11=12 \text{ (không thỏa đề)} \end{cases}$

Vậy không thể sắp thỏa đề bài.

HẾT